*and* $\{-\infty\}$.

Keywords: $\sigma$-algebra, measure, $\sigma$-additive set function.

УДК 517.98

## ЛАПЛАСИАН ЛЕВИ НА БЕСКОНЕЧНОМЕРНОМ МНОГООБРАЗИИ

Б.О. Волков[1]

1 *borisvolkov1986@gmail.com*; Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

*В статье обсуждается связь двух определений лапласиана Леви на бесконечномерном многообразии. Первое из них заключается в том, что лапласиан Леви определяется как среднее Чезаро вторых производных по направлению. Второе из них заключается в том, что лапласиан Леви определяется как интегральный функционал, заданный специальным видом второй производной. Интерес к лапласиану Леви обусловлен его связью с калибровочными полями.*

**Ключевые слова**: лапласиан Леви, бесконечномерное многообразие, уравнения Янга-Миллса.

Оригинальное определение лапласиана Леви было следующим. Лапласиан Леви $\Delta_L^{\{e_n\}}$ — это бесконечномерный лапласиан, действующий на функции $f$, определенной на пространстве $L_2[0,1]$, по формуле

$$\Delta_L^{\{e_n\}} f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} < f''(x)e_k, e_k >,$$

где $\{e_n\}$ – ортонормированный базис в $L_2[0,1]$.

Другое определение лапласиана Леви заключается в следующем. Пусть вторая производная Фреше функции $f$ имеет вид:

$$< f''(x)u, v >= \int_0^1 K^V(x;t,s)u(t)v(s)\,dt\,ds + \int_0^1 K^L(x;t)u(t)v(t)\,dt,$$

где $K^V(x;\cdot,\cdot) \in L_2([0,1]\times[0,1])$ и $K^L(x;\cdot) \in L_\infty[0,1]$, тогда лапласиан Леви $\Delta_L$ можно определить по формуле

$$\Delta_L f(x) = \int_0^1 K^L(x;t)\,dt.$$

Ортонормированный базис $\{e_n\}$ в $L_2[0,1]$ называется слабо равномерно плотным, если $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 h(t)(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n e_k^2(t)-1)\,dt = 0$ для любой функции $h \in L_\infty[0,1]$. Примером слабо равномерно плотного базиса является $e_n(t) = \sqrt{2}\sin(\pi n t)$. Для слабо равномерно плотного базиса $\{e_n\}$ выполняется

$$\Delta_L \subset \Delta_L^{\{e_n\}}. \qquad (1)$$

В работе [1] Л. Аккарди, П. Гибилиско и И.В. Воловича по аналогии со вторым определением лапласиана Леви был введен бесконечномерный лапласиан на пространстве функций на пространстве кривых в $\mathbb{R}^d$. Этот аналог также называется лапласианом Леви. Для такого оператора в [1] было доказано следующее. Связность в векторном расслоении над $\mathbb{R}^d$ является решением уравнений Янга-Миллса тогда и только тогда, когда соответствующий связности параллельный перенос является решением уравнения Лапласа для лапласиана Леви. В работе [2] Р. Леандра и И.В. Воловича определение лапласиана Леви и теорема о связи с уравнениями Янга-Миллса были обобщены на случай многообразия. В работе [3] Л. Аккарди и О.Г. Смолянова был предложен аналог первого определения оригинального лапласиана Леви для случая многообразия. В настоящей работе показывается, что лапласианы Леви на бесконечномерном многообразии связаны соотношением аналогичным (2).

Если $\pi\colon \mathbf{E} \to \mathbf{M}$ –векторное расслоение, символом $\Xi_{\mathbf{E}}$ будем обозначать пространство сечений в этом расслоении. Пусть $(M, g)$ — это $C^\infty$-гладкое риманово односвязное многообразие размерности $d$ с римановой метрикой $g$. Пусть $H^1_m([0,1], M)$ — гильбертово многообразие $H^1$-кривых на $M$ с началом в точке $m \in M$. Пусть $\pi_E\colon E \to M$ — векторное расслоение над $M$ со слоем $\mathbb{C}^N$. Если $p \in M$, пусть $E_p$ — слой над $p$ в расслоении $E$. Пусть $\pi_{\mathscr{E}}\colon \mathscr{E} \to H^1_m([0,1], M)$ — векторное расслоение на $H^1_m([0,1], M)$, слоем которого над $\gamma \in H^1_m([0,1], M)$ является пространство линейных операторов из $E_m$ в $E_{\gamma(1)}$.

Пусть $Q(\gamma, t)$ параллельный перенос в $TM$ вдоль $\gamma \in H^1_m([0,1], M)$, порожденный связностью Леви-Чивиты на $M$. Пусть $Z \in T_mM$ и $h \in C^1([0,1], \mathbb{R})$, причем $h(0) = 0$. Для кривой $\gamma \in H^1_m([0,1], M)$ кривая $\gamma^{Z,h}_s \in H^1_m([0,1], M)$, где $s \in (-\delta, \delta)$ для достаточно малого $\delta > 0$, определяется формулой:

$$\gamma^{Z,h}_s(t) = \exp_{\gamma(t)}(\mathrm{sh}(t)Q(\gamma, t)Z),$$

где $\exp_p$ – экспоненциальное отображение в точке $p \in M$. Пусть $\{Z_1, \ldots, Z_d\}$ — ортонормированный базис в $T_mM$. Обозначим символом $\Omega$ множество ортонормированных базисов в $L_2(0,1)$ таких, что $e_n \in C^1[0,1]$ и $e_n(0) = e_n(1) = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

**Определение.** *Лапласиан Леви $\Delta^{\{e_n\}}_L$ — это линейное отображение*

$$\Delta^{\{e_n\}}_L : dom\Delta^{\{e_n\}}_L \to \Xi_{\mathscr{E}},$$

*определенное формулой:*

$$\Delta^{\{e_n\}}_L \varphi(\gamma) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{d} \frac{d^2}{ds^2}\bigg|_{s=0} \varphi(\gamma^{Z_i, e_k}_s), \tag{2}$$

*где $dom\Delta^{\{e_n\}}_L$ — это пространство всех сечений $\varphi \in \Xi_{\mathscr{E}}$ для которых правая часть (2) существует для всех $\gamma \in H^1_m([0,1], M)$.*

Над $H^1_m([0,1], M)$ существуют два канонических векторных расслоения $\alpha_0\colon \mathscr{H}^0 \to H^1_m([0,1], M)$ и $\alpha_1\colon \mathscr{H}^1 \to H^1_m([0,1], M)$ (см. [4]). Слоем в $H^0$ над $\gamma \in H^1_m([0,1], M)$ является пространство $H^0$-полей вдоль $\gamma$. Каноническая риманова метрика в расслоении $\mathscr{H}^0$ определяется формулой

$$< X(\gamma), Y(\gamma) >_0 = \int_0^1 g(X(\gamma)(t), Y(\gamma)(t))dt.$$

Символом $\nabla^{\alpha_0}$ будем обозначать ковариантное дифференцирование, ассоциированное с канонической связностью в $\mathscr{H}^0$, порожденной связностью Леви-Чивиты на $M$.

Слоем в $\mathscr{H}^1$ над $\gamma \in H^1_m([0,1],M)$ является пространство $H^1$-полей $X(\gamma)$ вдоль $\gamma$ таких, что $X(\gamma)(0)=0$. Если $X \in \Xi_{\mathscr{H}^1}$ и $\gamma \in H^1_m([0,1],M)$, то $X(\gamma)$ — $H^1$-путь в $TM$. Его ковариантная производная — это $\nabla X(\gamma)(s)=\frac{d}{ds}X(\gamma)(s)+\Gamma(\gamma(s))(X(\gamma)(s),\gamma(s))$, где $\Gamma$ — символы Кристоффеля связности Леви-Чивиты на $M$. Каноническая риманова метрика в расслоении $\mathscr{H}^1$ определяется формулой:

$$< X(\gamma), Y(\gamma) >_1 = \int_0^1 g(X(\gamma)(t), Y(\gamma)(t)))dt + \int_0^1 g(\nabla X(\gamma)(t), \nabla Y(\gamma)(t))dt.$$

Расслоение $\mathscr{H}^1$ является касательным расслоением над $H^1_m([0,1],M)$. Пусть $\Xi^0_{\mathscr{H}^1}$ обозначает пространство сечений $X \in \Xi_{\mathscr{H}^1}$ таких, что $X(\gamma)(1)=0$ для всех $\gamma \in H^1_m([0,1],M)$. Если $\varphi \in \Xi_{\mathscr{E}}$ и $X \in \Xi^0_{\mathscr{H}^1}$, то $d_X\varphi$ — это производная $\varphi$ по направлению $X$.

**Определение.** *Если $\varphi \in \Xi_{\mathscr{E}}$, то $\alpha_0$-градиент $\varphi$ — это такое сечение из $grad_{\alpha_0}\varphi \in \Xi_{\mathscr{E}\otimes\mathscr{H}^0}$, что*

$$< \mathrm{grad}_{\alpha_0}\varphi(\gamma), X(\gamma) >_0 = d_X\varphi(\gamma)$$

*для всех $X \in \Xi^0_{\mathscr{H}^1}$.*

Пусть для $\psi \in \Xi_{\mathscr{H}^0\otimes\mathscr{E}}$ и для всех $X, Y \in \Xi^0_{\mathscr{H}^1}$ выполняется

$$\begin{aligned} < \nabla^{\alpha_0}_X \psi(\gamma), Y(\gamma) >_0 = \int_0^1\int_0^1 K^V(\gamma; s,t) < X(\gamma)(t), Y(\gamma)(s) > dsdt + \\ + \int_0^1 K^L(\gamma;t) < X(\gamma)(t), Y(\gamma)(t) > dt + \int_0^1 K^S(\gamma;t) < \nabla X(\gamma)(t), Y(\gamma)(t) > dt + \\ + \int_0^1 K^S(\gamma;t) < \nabla Y(\gamma)(t), X(\gamma)(t) > dt, \end{aligned}$$

где $K^L=(K^L_{\mu\nu})$ — симметричный тензор и $K^S=(K^S_{\mu\nu})$ — антисимметричный тензор со значениями в пространстве линейных операторов из $E_m$ в $E_{\gamma(1)}$), для каждого $\gamma \in H^1_m([0,1],M)$ функции $K^V_{\mu\nu}(\gamma;\cdot,\cdot)$ принадлежат классу $L_2$, $K^L_{\mu\nu}(\gamma;\cdot)$ принадлежат классу $L_1$, а $K^S_{\mu\nu}(\gamma;\cdot)$ принадлежат классу $L_\infty$.

**Определение.** *Значение дивергенции Леви на $\psi$ определяется формулой*

$$\mathrm{div}_L\psi(\gamma) = \int_0^1 \sum_{\mu=1}^d K^L_{\mu\mu}(\gamma;t)dt$$

**Определение.** *Значение лапласиана Леви $\Delta_L$ на $\varphi \in \Xi_{\mathscr{E}}$ определяется формулой*

$$\Delta_L\varphi = \mathrm{div}_L(\mathrm{grad}_{\alpha_0}\varphi)$$

**Теорема.** *Пусть $\{e_n\} \in \Omega$. Если элементы $\{e_n\}$ образуют равномерно ограниченную систему функций, то $\Delta_L \subset \Delta_L^{\{e_n\}}$.*

## Литература

1. Accardi L., Gibilisco P., Volovich I.V. *Yang-Mills gauge fields as harmonic functions for the Levy-Laplacians* // Russ. J. Math. Phys. – 1994. – V. 2. – № 2. – P. 235–250.

2. Leandre R., Volovich I.V. *The Stochastic Levy Laplacian and Yang–Mills equation on manifolds* // Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. – 2001. – V. 4.– № 2. – P. 161–172.

3. Аккарди Л., Смолянов О.Г. *Формулы Фейнмана для эволюционных уравнений с лапласианом Леви на бесконечномерных многообразиях* // ДАН. –2006. – Т. 407.– № 5. – С. 583–588.

4. Klingenberg W. *Riemannian geometry.* – de Gruyter Studies in Mathematics. V. 1, Berlin, 1982.

LEVY-LAPLACIAN ON INFINITE-DIMENSIONAL MANIFOLD

B.O. Volkov

*The article discusses the connection between two definitions of the Levy-Laplacian on an infinite-dimensional manifold. In the first of the definitions, the Levy-Laplacian is defined as the Cesaro mean of the second order directional derivatives. In the second one, the Levy-Laplacian is given as an integral functional defined by a special kind of the second derivative. Interest in the Levy-Laplacian is due to its connection with the gauge fields.*

Keywords: Levy-Laplacian, infinite dimensional manifold, Yang-Mills equations.

УДК 517.518

## СЛАБЫЕ И СИЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ГРУБЫХ ОПЕРАТОРОВ ТИПА ХАУСДОРФА НА *P*-АДИЧЕСКОМ ЛИНЕЙНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

С.С. Волосивец[1]

1 *volosivetsss@mail.ru*; НИУ Саратовский государственный университет

*Для грубых операторов типа Хаусдорфа, определенных на p-адическом линейном пространстве $Q_p^n$, и их коммутаторов с символом из пространства Липшица мы приводим достаточные условия их ограниченности из одного пространства Лоренца в другое.*

**Ключевые слова**: оператор Хаусдорфа, коммутатор, слабый тип, пространство Лоренца, интерполяция.

Пусть $p$ – простое число и $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$. Если $x$ записано в вид $x = p^\gamma m/n$, где $\gamma = \gamma(x) \in \mathbb{Z}$ и $m, n \in \mathbb{Z}$ взаимно просты с $p$, то $|x|_p := p^{-\gamma}$ (для $x = 0$ полагаем $|0|_p = 0$). Величина $|x|_p$ имеет все свойства нормы на поле, включая равенство $|xy|_p = |x|_p|y|_p$ и дополнительное свойство $|x+y|_p \le \max(|x|_p, |y|_p)$. Через $\mathbb{Q}_p$ обозначим замыкание $\mathbb{Q}$ по норме $|\cdot|_p$. Каждое $x \in \mathbb{Q}_p$, $x \neq 0$, имеет представление

$$x = p^\gamma(x_0 + x_1 p + x_2 p^2 + \dots) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i p^{i+\gamma},$$

где $x_0 \neq 0$, $x_i \in \mathbb{Z}$, $0 \le x_i < p$, $\gamma \in \mathbb{Z}$. В этом случае $|x|_p = p^{-\gamma}$ и $|0|_p = 0$. С этой нормой $\mathbb{Q}_p$ снова является полем. Пусть $B_k(x_0) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - x_0|_p \le p^k\}$ и $S_k(x_0) = \{x \in \mathbb{Q}_p :$